Kombinációk
(Kombinácie)

A variációknál és a permutációknál rendezett elemk-sokat hoztunk létre – függött az elemek sorrendjétől. Ha a rendezett elemk-sok helyett csak részhalmazokat hozunk létre, kombinációkat kapunk. Az első évfolyamban a halmazoknál tanultuk két halmaz egyenlőségét (akkor egyenlők, ha ugyanazon elemeket tartalmazzák ⇒ az elemek felsorolásánál lényegtelen a sorrend) – nem kapok új halmazt, ha ugyanazokat az elemeket sorolom fel csak más sorrendben.

D. ***n* elem *k*-ad osztályú (*ismétlés nélküli*) *kombinációja*** (kombinácie k-tej triedy z n prvkov [bez opakovania]) az n elemű halmazból képezett k elemű részhalmazok összessége.
M. Itt is a részhalmaz elemeinek száma kevesebb vagy egyenlő (legfeljebb) az alaphalmaz elemeinek számával.

$k \leq n$

Hogy számíthatjuk ki a kombinációk számát?
A bevezető példákban, a második feladatban (mikor három azonos könyvet sorsoltunk ki az osztályban), az ismétlés nélküli variációk számából indultunk ki (az első feladat eredménye). Azt az értéket osztottuk azzal a számmal, ahányféleképp tudtunk sorban leírni három nevet – hattal. Ha ezt általánosítani szeretnénk, valahogy meg kell határoznunk a helyes osztót.
Ott először rendezett elemhármasokat hoztunk létre (harmadosztályú variációk), majd csak utána tértünk át a háromelemű részhalmazokra (harmadosztályú kombinációk). Ha négy könyvünk lenne, akkor a negyedosztályú variációk számát kellene osztanunk a négy elem sorbarendezésének számával (4 permutációjával) – P(4) = 4! = 24.
Vagyis – a kombinációk számát megkapjuk, ha a variációk számát elosztjuk az osztály permutációival:

$$C_k(n) = \frac{V_k(n)}{P(k)} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!}$$

Az emeletes tört eltüntetésével megkapjuk a végleges alakot.

T. Az ismétlés nélküli kombinációk számát az alábbi képlet segítségével számolhatjuk:

$$C_k(n) = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$$

M. A számológépeken az ismétlés nélküli kombinációt megtalálhatjuk (nem mindegyik tudományoson), mint az *n*C*r* funkciót.

M. Létezik ismétléses kombináció is. Úgy kell értenünk, hogy olyan részhalmazokat képezünk, ahol az elemek ismétlődhetnek – halmazelméletből tudjuk, hogy egy halmaz elemeinek a száma nem növekszik, ha a halmaz megadásánál valamelyik elemét többször is említjük.
Változtassunk az első bevezető feladatunkon úgy, hogy a könyvek azonosak lesznek (mint a második példában), de az osztályfőnök a diákot többször is jutalmazhatja könyvvel (a diák több könyvet is kaphat – kettőt vagy mindhármat).
Haladjunk lépésenként:

cédulákra írja a neveket, és elhelyezi egy urnában
kisorsolja az elsőt, majd visszarakja a cédulát az urnába
kihúzza a másodikat, és újra visszateszi azt
a harmadik kiválasztása után végez, és már nem rak vissza semmit az urnába

Ez olyan, mintha az urnában eredetileg két cédulával több lett volna (természetesen nem tudhatja, melyik két névvel – ez függ az első és a második sorsolástól), mert kétszer visszatette a cédulákat.
Ha hasonlóan gondolkodunk egyéb elemszámok (k) mellett is – például 10 könyvet oszt szét a diákok között: ekkor kilencszer teszi vissza a cédulát – ami pontosan annak felel meg, mintha eredetileg (k – 1)-gyel több cédulája lett volna, vagyis 9-cel több.
Ezért az ismétléses kombinációk számának meghatározása az ismétlés nélküli kombinációk számának kiszámításával történik, csak az alaphalmaz elemeinek számát megnöveljük az osztályszám mínusz eggyel (k – 1-gyel).

$$C'_k(n) = C_k(n + k - 1) = \frac{(n+k-1)!}{k!.(n-1)!}$$

példa:

Soroljuk fel az a, b, c, d, e, f elemekből képzett harmadosztályú kombinációit!

{a; b; c}, {a; b; d}, {a; b; e}, {a; b; f},
{a; c; d}, {a; c; e},{a; c; f},
{a; d; e}, {a; d; f},
{a; e; f},
{b; c; d}, {b; c; e}, {b; c; f},
{b; d; e},{b; d; f},
{b; e; f},
{c; d; e}, {c; d; f},
{c; e; f},
{d; e; f}

Hányféleképp választható ki egy osztály 28 diákjából öttagú csapat?

$$C_5(28) = \frac{28!}{5!.23!} = \frac{28.27.26.25.24.23!}{5.4.3.2.23!} = 28.27.26.5 = 98\ 280$$

Az osztályban 21 fiú és 11 lány van. Hány különböző öttagú csapat hozható létre belőlük, ha a csapatnak három fiúból és két lányból kell állnia?

$$C_3(21).C_2(11) = \frac{21!}{3!.18!}.\frac{11!}{2!.9!} = \frac{21.20.19.18!}{3.2.18!}.\frac{11.10.9!}{2.9!} = 1\ 330.55 = 73\ 150$$

Határozzuk meg az n elemszámot, ha a belőlük képezett másodosztályú kombinációk száma 78!

$n \geq 2$

$n \in \mathbb{N}$

$$C_2(n) = 78$$
$$\frac{n!}{2!.(n-2)!} = 78$$
$$\frac{n.(n-1).(n-2)!}{2.(n-2)!} = 78$$
$$\frac{n.(n-1)}{2} = 78 \qquad /.2$$
$$n.(n-1) = 156 \qquad /-156$$
$$n^2 - n - 156 = 0$$
$$(n-13).(n+12) = 0$$
$$n - 13 = 0 \qquad n + 12 = 0$$
$$n_1 = 13 \qquad n_2 = -12$$

Határozzuk meg az n elemszámot, ha a belőlük képezett harmadosztályú kombinációk száma 560!

$n \geq 3$

$n \in \mathbb{N}$

$$C_3(n) = 560$$
$$\frac{n!}{3!.(n-3)!} = 560$$
$$\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)!}{3.2.(n-3)!} = 560$$
$$\frac{n.(n-1).(n-2)}{6} = 560 \qquad /.6$$
$$n.(n-1).(n-2) = 3\ 360$$

beszorozva harmadfokú egyenletet kapnánk, amit nem tudunk megoldani
de megközelítőleg azonos értéket kapunk, ha a szélső tényezőket a középsővel helyettesítjük

$$n.(n-1).(n-2) \approx (n-1)^3$$
$$(n-1)^3 \approx 3\ 360 \qquad /\sqrt[3]{}$$
$$n - 1 \approx 14{,}98$$
$$n - 1 = 15$$
$$n = 16$$

Ha megnöveljük az n elemszámot eggyel, a belőle képzett harmadosztályú kombinációk száma 55-tel nő. Mennyi elemünk volt?

$n \geq 3$

$n \in \mathbb{N}$

$$C_3(n+1) = C_3(n) + 55$$
$$\frac{(n+1)!}{3!.(n+1-3)!} = \frac{n!}{3!.(n-3)!} + 55$$
$$\frac{(n+1)!}{3!.(n-2)!} = \frac{n!}{3!.(n-3)!} + 55$$
$$\frac{(n+1).n.(n-1)(n-2)!}{3.2.(n-2)!} = \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)!}{3.2.(n-3)!} + 55$$
$$\frac{(n+1).n.(n-1)}{6} = \frac{n.(n-1).(n-2)}{6} + 55 \qquad /.6$$
$$(n+1).n.(n-1) = n.(n-1).(n-2) + 330$$
$$n.(n^2-1) = n.(n^2-3n+2) + 330$$
$$n^3 - n = n^3 - 3n^2 + 2n + 330 \qquad /-n^3+n$$
$$0 = -3n^2 + 3n + 330 \qquad /:(-3)$$
$$0 = n^2 - n - 110$$
$$0 = (n+10).(n-11)$$

$n + 10 = 0$ $\qquad$ $n - 11 = 0$

$n_1 = -10$ $\qquad$ $n_2 = 11$

Ha megnöveljük az n elemszámot kettővel, a belőle képzett negyedosztályú kombinációk száma a háromszorosára nő. Mennyi elemünk volt?

$n \geq 4$

$n \in \mathbb{N}$

$$C_4(n+2) = 3.C_4(n)$$
$$\frac{(n+2)!}{4!.(n+2-4)!} = 3.\frac{n!}{4!.(n-4)!}$$
$$\frac{(n+2)!}{4!.(n-2)!} = 3.\frac{n!}{4!.(n-4)!}$$
$$\frac{(n+2).(n+1).n.(n-1).(n-2)!}{4.3.2.(n-2)!} = 3.\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)!}{4.3.2.(n-4)!} \qquad /.24$$
$$(n+2).(n+1)n.(n-1) = 3.n.(n-1).(n-2).(n-3) \qquad /:[n.(n-1)]$$
$$(n+2).(n+1) = 3.(n-2).(n-3)$$
$$n^2 + 3n + 2 = 3.(n^2 - 5n + 6)$$
$$n^2 + 3n + 2 = 3n^2 - 15n + 18 \qquad /-n^2-3n-2$$
$$0 = 2n^2 - 18n + 16 \qquad /:2$$
$$0 = n^2 - 9n + 8$$
$$0 = (n-1)(n-8)$$

$n - 1 = 0$ $\qquad$ $n - 8 = 0$

$n_1 = 1$ $\qquad$ $n_2 = 8$

Hány egyenest határoz meg 12 pont, ha:

a, semelyik három nem illeszkedik egy egyeneshez
b, öt pont egy egyenesen van
c, hat-hat pont egy-egy egyenesen fekszik

a,

két pont meghatároz egy egyenest → párokat alkotunk: másodosztályú kombinációk (független a pontok sorrendjétől)

$$C_2(12) = \frac{12!}{2!.10!} = \frac{12.11.10!}{2.10!} = 66$$

---

b,

ha a pontok egy egyenesen fekszenek, kiszámoljuk, hogy mennyi egyenest határoznának meg, amennyiben nem lennének kollineárisak – ezt levonjuk

viszont meghatároznak egy egyenest, amihez éppen illeszkednek, vagyis hozzáadunk egyet

$$C_2(5) = \frac{5!}{2!.3!} = \frac{5.4.3!}{2.3!} = 10$$

$66 - 10 + 1 = 57$

más módon – két csoportba soroljuk őket, és így választunk ki két pontot, amik az egyenest meghatározzák

pontok az egyenesen (5)	pontok az egyenesen kívül (7)	a keletkezett egyenesek száma
2	0	$1.C_0(7) = 1.1 = 1$
1	1	$C_1(5).C_1(7) = 5.7 = 35$
0	2	$C_0(5).C_2(7) = 1.\frac{7!}{2!.5!} = 1.21 = 21$
	összesen:	57

---

c,

hasonlóan gondolkodva: hat pont (ha nem lennének egy egyenesen) 15 egyenest határozna meg

$C_2(6) = \frac{6!}{2!.4!} = 15$

helyette egy egyenest alkotnak → 14-gyel kevesebb

ugyanígy a másik hat pontnál – 14-gyel kevesebb egyenest határoznak meg

$66 - 2.14 = 38$

másik módszerrel – a harmadik kérdésnél is két csoportba soroljuk a pontokat

pontok az első egyenesen (6)	pontok a második egyenesen (6)	a keletkezett egyenesek száma
2	0	$1.C_0(6) = 1.1 = 1$
1	1	$C_1(6).C_1(6) = 6.6 = 36$
0	2	$C_0(6).1 = 1.1 = 1$
	összesen:	38

Mennyi átlója van a szabályos tizenhatszögnek?

először kiszámoljuk, mennyi egyenest (szakaszt) határoznak meg a pontok

azután ebből levonjuk az oldalak számát

$C_2(16) = \frac{16!}{2!.14!} = \frac{16.15.14!}{2.14!} = 120$

$m = 120 - 16 = 104$

képlet nélkül: hogy átló keletkezzen, nem köthetem a szomszédos csúcsokkal (mínusz 2 pont)

szintén önmagával sem (mínusz 1 pont)

vagyis további 13 ponttal köthetem össze (általánosítva: $n - 3$)

ezt megtehetem mindegyik csúcsban – 16-szor (általánosítva: n-szer)

így viszont minden átlót duplán számolok (mindkét végpontnál)

vagyis csak a szorzat fele

$m = 13.16:2 = 104$

általánosan: $m = \frac{(n-3).n}{2}$

Hány háromszöget határoz meg 15 pont, ha:

a, semelyik három nem fekszik egy egyenesen (nem kollineárisak)
b, éppen 6 közülük kollineáris

a,

$C_3(15) = \frac{15!}{3!.12!} = \frac{15.14.13.12!}{3.2.12!} = 455$

---

b,

a 6 pont 20 háromszöget határozna meg – helyettük egy sem keletkezik

$C_3(6) = \frac{6!}{3!.3!} = 20$

$455 - 20 = 435$

egyéb módon – két csoportba soroljuk őket, és így választunk ki három pontot, amik meghatározzák a háromszöget

az egyenesen lévő (6)	az egyenesen kívül (9)	a keletkezett háromszögek száma
3	0	$0.C_0(9) = 0.1 = 0$
2	1	$C_2(6).C_1(9) = \frac{6!}{2!.4!}.9 = 15.9 = 135$
1	2	$C_1(6).C_2(9) = 6.\frac{9!}{2!.7!} = 6.36 = 216$
0	3	$C_0(6).C_3(9) = 1.\frac{9!}{3!.6!} = 1.84 = 84$

összesen: 435