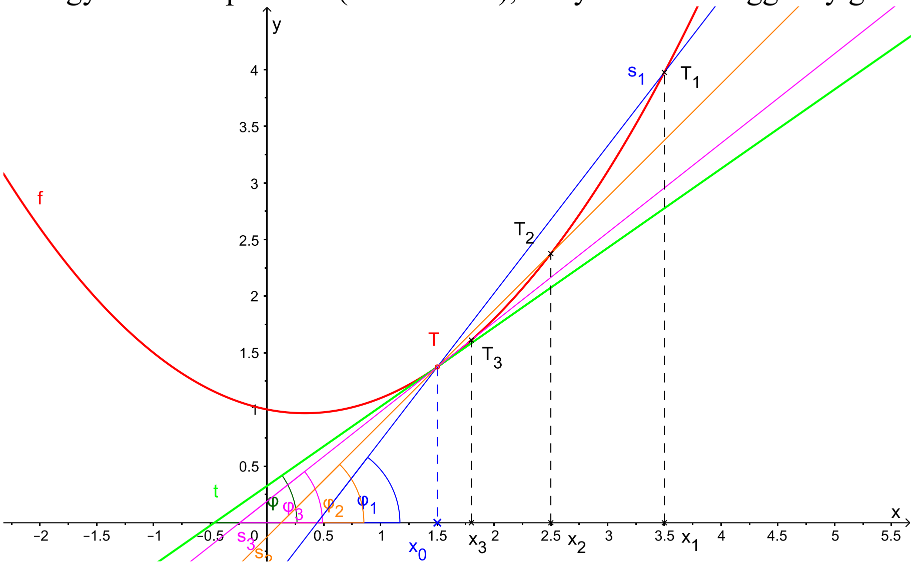
A függvény deriváltja

(Derivácia funkcie)

Keressük az *f* függvény érintőjét az x_0 pontban. Meg kell határoznunk ezt az egyenest – egy egyenes adott, ha ismerjük:

- az egyenes két pontját
- egy pontot és egy párhuzamos egyenest
- egy pontot és egy merőleges egyenest
- egy pontot és az *x* tengellyel bezárt szöget – irányszög (smerový uhol) – a koordinátarendszerben

D. Az *f* függvény ***érintője*** egy olyan egyenes, melynek egy (a, b) nyílt intervallumon belül csak egy közös pontja van a függvénnyel, és a függvény grafikonja ezen intervallumon az érintő által meghatározott félsíkok egyikében található. (az intervallumon kívül a grafikonnal több közös pontjuk is lehet)
Kivételt képez az érintő egy inflexiós pontban (lásd később), mely áthalad a függvény grafikonján.



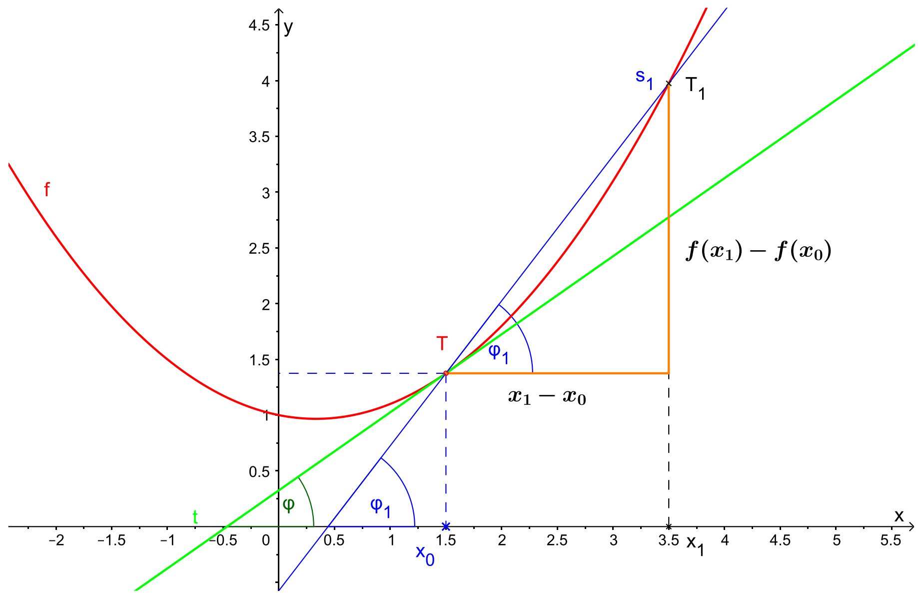
Ismert a keresett t érintő pontja – az érintési pont. Próbáljuk meghatározni a φ irányszöget. Ehhez olyan szelőket használunk, ahol a másik pont közelít a T ponthoz. Az x_1; x_2; x_3; … pontok felett találhatjuk a grafikonon a T_1; T_2; T_3; … pontokat. Minél közelebb vagyok az x értékekkel az x_0-hoz, annál közelebb kerülnek a szelők a keresett érintőhöz, és hasonlóan az irányszögek ($φ_1$; $φ_2$; $φ_3$; …) közelítenek az érintő φ irányszögéhez.
Ha tehát szeretnénk felírni az érintő egyenletét (mivel ezzel megoldanánk a problémát: ha megvan az egyenlete ≡ ismerem az egyenest), elegendő meghatároznunk az iránytényezőjét. Az egyenes iránytényezője az irányvektor tangense.

$k = \text{tg}\ φ$

Ha az iránytényező meghatározását ugyanazzal a módszerrel csinálom, vagyis az érintőhöz közelítő szelők iránytényezőit kiszámolva, ezek az iránytényezők is közelíteni fognak a keresett k értékhez.

$k_1 = \text{tg}\ φ_1$; $k_2 = \text{tg}\ φ_2$; $k_3 = \text{tg}\ φ_3$; …

Ezen tangensek értékeit kifejezhetjük úgy is mint a derékszögű háromszög befogóinak hányadosát.



$k_1 = \text{tg}\, \varphi_1 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

Ezen hányadosok határértéke egyenlő kell hogy legyen a keresett érintő iránytényezőjével.

$$k = \text{tg}\, \varphi = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Ezt az iránytényezőt nevezzük az f függvény x_0 pontbeli deriváltjának.

D.

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

M. A deriváltat többféleképp lehet jelölni. A definícióban használt jelölésmód csak egyismeretlenes függvényeknél használható.

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = D_x f = \frac{\partial f}{\partial x}$$

T. $\forall x = x_0$: $\exists f'(x)$; $g'(x)$; $c \in \mathbb{R}$

a, összeg/különbség deriváltja

$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$ — az összeg/különbség minden tagját deriváljuk majd összeadjuk/kivonjuk

b, többszörös (számszoros) deriváltja

$(c.f)'(x) = c.f'(x)$ — a derivált függvényt megszorozzuk a számmal

c, szorzat deriváltja

$(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$ — deriváljuk az egyiket és megszorozzuk a másikkal, deriváljuk a másikat és megszorozzuk az elsővel, és ezeket összeadjuk

d, hányados deriváltja

$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{g^2(x)}$ — a számláló deriváltja szorozva a nevezővel mínusz a nevező deriváltja szorozva a számlálóval, és ez osztva a nevező négyzetével

Biz.

a, $(f+g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{[f(x)+g(x)]-[f(x_0)+g(x_0)]}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)+g(x)-g(x_0)}{x-x_0} =$

$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$

b, $(c.f)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{c.f(x)-c.f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{c.[f(x)-f(x_0)]}{x-x_0} = c.\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = c.f'(x_0)$

c, $(f.g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x).g(x)-f(x_0).g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x).g(x)-f(x_0).g(x)-f(x_0).g(x_0)+f(x_0).g(x)}{x-x_0} =$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x).g(x)-f(x_0).g(x)+f(x_0).g(x)-f(x_0).g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{[f(x)-f(x_0)].g(x)+f(x_0).[g(x)-g(x_0)]}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{[f(x)-f(x_0)].g(x)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0).[g(x)-g(x_0)]}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} . \lim_{x\to x_0} g(x) + \lim_{x\to x_0} f(x_0) . \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0).g(x_0) + f(x_0).g'(x_0)$$

d, $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x).g(x_0)-f(x_0).g(x)}{g(x).g(x_0)}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x).g(x_0)-f(x_0).g(x)}{(x-x_0).g(x).g(x_0)} =$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x).g(x_0)-f(x_0).g(x)}{x-x_0} . \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x).g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x).g(x_0)-f(x_0).g(x_0)-f(x_0).g(x)+f(x_0).g(x_0)}{x-x_0} . \frac{1}{g^2(x_0)} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{[f(x)-f(x_0)].g(x_0)-f(x_0).[g(x)-g(x_0)]}{x-x_0} . \frac{1}{g^2(x_0)} = \left[\lim_{x\to x_0} \frac{[f(x)-f(x_0)].g(x_0)}{x-x_0} - \lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0).[g(x)-g(x_0)]}{x-x_0}\right] . \frac{1}{g^2(x_0)}$$

$$= \left[\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} . \lim_{x\to x_0} g(x_0) - \lim_{x\to x_0} f(x_0) . \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right] . \frac{1}{g^2(x_0)} = [f'(x_0).g(x_0) - f(x_0).g'(x_0)] . \frac{1}{g^2(x_0)}$$

$$= \frac{f'(x_0).g(x_0)-f(x_0).g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

példa:

Számítsuk ki az $f(x) = 3x + 2$ függvény deriváltjának értékét az $x_0 = 2$ pontban.

$$f'(x_0) = f'(2) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{3x+2-(3.2+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{3x+2-8}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{3x-6}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{3(x-2)}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to 2} 3 = 3$$

Számítsuk ki a $g(x) = x^2$ függvény deriváltjának értékét az $x_0 = 4$ pontban.

$$g'(x_0) = g'(4) = \lim_{x\to 4} \frac{g(x)-g(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{x^2-4^2}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = \lim_{x\to 4}(x+4) = 4 + 4 = 8$$

Számítsuk ki a $h(x) = x^2 - 2x$ függvény deriváltjának értékét az $x_0 = -1$ pontban.

$$h'(x_0) = h'(-1) = \lim_{x\to -1} \frac{h(x)-h(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x^2-2x-\left((-1)^2-2(-1)\right)}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{x^2-2x-3}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-3)}{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to -1} (x-3) = -1 - 3 = -4$$

Számítsuk ki az $i(x) = x^3 - 4x^2 - 3x$ függvény deriváltjának értékét az $x_0 = 1$ pontban.

$$i'(x_0) = i'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{i(x)-i(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^3-4x^2-3x-(1^3-4.1^2-3.1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^3-4x^2-3x-(-6)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^3-4x^2-3x+6}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2-3x-6)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x^2-3x-6) = 1^2 - 3.1 - 6 = -8$$